2019-2020
2ème Bac-Pro

ثانوية الليمون-بيركان

▶ Exercices corrigés

étude analytique de l'espace

⟨ exercices de bases ⟩

Ex.1 : $A(1;3;-2)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$

1°/ Donner une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$.

2°/ a-t-on $B(0;1;4)\in(D)$?

3°/ (Δ) est une droite passant par B est parallèle à (D).

Donner une représentation paramétrique de (Δ)

▶ Solution : 1°/ $(D):\begin{cases}x=1-t\\y=3\\z=-2+5t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

2°/ $B\in(D)\Leftrightarrow(\exists\, t\in\mathbb{R})\begin{cases}x_B=1-t\\y_B=3\\z_B=-2+5t\end{cases}$

mais $y_B=1\neq3$ donc $B\notin(D)$.

3°/ on a $(\Delta)\parallel(D)$ donc (D) et (Δ) ont le même vecteur directeur ;

c-à-d $(\Delta)=\Delta(B;\vec{u})$

donc : $(\Delta):\begin{cases}x=-t\\y=1\\z=4+5t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

Ex.2 : $A(-1;0;1)$, $B(3,2,0)$, $C(4;1;1)$

Verifier que A;B et C ne sont pas alignés. (C,B,A غير مستقيمية)

▶ Solution :

Rappel : $\begin{pmatrix}A;B;C\\\text{alignés}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\vec{AB}\text{ et }\vec{AC}\text{ sont}\\\text{colinéaires}\end{pmatrix}$

on a : $\vec{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-0\\0-1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}4-(-1)\\1-0\\1-1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AC}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$

on calcul les déterminants extraits du tableau $\begin{bmatrix}4&5\\2&1\\-1&0\end{bmatrix}$. on a :

$\begin{vmatrix}4&5\\2&1\end{vmatrix}=4\times1-2\times5=4-10=-6\neq0$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

donc : **A ; B et C ne sont pas alignés**

2ème Solution :

prop : $\begin{pmatrix}A;B;C\\\text{alignés}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\exists k\in\mathbb{R}\text{ tq}:\\\vec{AB}=k\times\vec{AC}\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{R})\begin{cases}4=5k\\2=k\\-1=0\times k\end{cases}$

mais $-1\neq0$; donc :

A B et C ne sont pas alignés

Ex.3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\10\\3\end{pmatrix}$

1°/ Calculer $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.

2°/ En déduire que $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

▶ Solution :

1°/ $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&-1&6\\1&2&10\\0&2&3\end{vmatrix}$

$=\overset{+}{\begin{vmatrix}\textcircled{1}&*&*\\ *&2&10\\ *&2&3\end{vmatrix}}+\overset{-}{\begin{vmatrix}*&\textcircled{-1}&*\\1&*&10\\0&*&3\end{vmatrix}}+\overset{+}{\begin{vmatrix}*&*&\textcircled{6}\\1&2&*\\0&2&*\end{vmatrix}}$

$=+\textcircled{1}\begin{vmatrix}2&10\\2&3\end{vmatrix}-\textcircled{-1}\begin{vmatrix}1&10\\0&3\end{vmatrix}+\textcircled{6}\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}$

$=(6-20)+(3-0)+6(2-0)$

$=-14+3+12=\boxed{1}$

2°/ on a $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=1\neq0$

donc : $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires (غير مستوائية)

$\vec{w}$ $\vec{u}$ $\vec{v}$

لا توجد في نفس المستوى :

Ex. 4 : $A(5;7;6)$, $B(-2;-3;1)$
$C(3;0;1)$, $D(0;1;1)$

Montrer que : A, B, C et D ne sont pas coplanaires (غير مستوائية)

▶ **Solution** :

Rappel $\begin{pmatrix} A,B,C,D \\ \text{coplanaires} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} \\ \text{coplanaires} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD}) = 0$

donc : (A, B, C, D ne sont pas coplanaires)

$\Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD}) \neq 0$

on détermine $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-5 \\ -3-7 \\ 1-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 0-(-3) \\ 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} \overset{+}{-7} & \overset{-}{5} & \overset{+}{-3} \\ -10 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} -10 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -10 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7(0-0) - 5(0+5) - 3(0+15)$$

$$= 0 - 25 - 45 = -70$$

Comme $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD}) = -70 \neq 0$

donc : **A, B, C et D ne sont pas coplanaires**

A و B و C و D لا تنتمي إلى نفس المستوى.

Ex. 5 : $A(2;0;3)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

1°/ Donner une représentation paramétrique du plan : $\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v})$.

2°/ Donner deux points appartenant à $(\mathcal{P})$.

▶ **Solution** : 1°/ $(\mathcal{P})$ passe par le point A et dirigés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

donc :
$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = 2 + t - 3\lambda \\ y = t + 7\lambda \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad (t;\lambda) \in \mathbb{R}^2$$

2°/ Pour donner des points appartenant au plan $(\mathcal{P})$; il suffit de remplacer t et λ par des valeurs quelconques, par exemple : $t = 1$ et $\lambda = 0$

$$\begin{cases} x = 2 + 1 \\ y = 1 \\ z = 3 + 4\times 1 \end{cases} \Rightarrow B(3;1;7) \in (\mathcal{P})$$

on prend : $t = 0$; $\lambda = 1$ on trouve :

$$\begin{cases} x = 2 - 3\times 1 \\ y = 7\times 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;7;3) \in (\mathcal{P})$$

Ex. 6 : (Q) un plan passant par $A(1;1;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Q).

Donner une équation cartésienne de (Q).

▶ **Solution** : On a :

$$(Q) : ax + by + cz + d = 0$$

avec : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur normal $\vec{n}$; donc :

$$(Q) : 2x + 0xy + 4z + d = 0$$

càd : $(Q) : 2x + 4z + d = 0$

on a : $A \in (Q)$ donc les coordonnées de A vérifient l'éq de (Q) ; c-à-d :

$$2x_A + 4z_A + d = 0$$

$\Rightarrow 2(1) + 4(3) + d = 0 \Rightarrow d = -14$

donc : $(Q) : 2x + 4z - 14 = 0$

ou encore : $\boxed{(Q) : x + 2z - 7 = 0}$

Ex. 7 : on considère deux droites (Δ) et (D) :

$(\Delta)\begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 1+6\lambda \\ z = -2-\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$ $\quad (D) : \begin{cases} x = -t \\ y = 2+t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne : $x + 2y + z - 15 = 0$

1°/ Montrer que : $(D) \perp (\Delta)$

2°/ Determiner $(\Delta) \cap (\mathcal{P})$.

▸ **Solution :** 1°/ Rappel : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\6\\-1\end{pmatrix}$ directeur de (Δ)

et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ directeur de (D)

prop $\boxed{(\Delta) \perp (D) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$

Comme : $\vec{u} \times \vec{v} = (3)(-1) + (6)(1) + (-1)(3)$

$= -3 + 6 - 3 = 0$

donc $\vec{u} \perp \vec{v}$ c-à-d : $\boxed{(\Delta)\perp(D)}$

2°/ Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

$M \in (\Delta)\cap(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\Delta) \\ M \in (\mathcal{P}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ vérifie l'éq de } (\Delta). \\ M \text{ vérifie l'éq de } (\mathcal{P}). \end{cases}$

$\begin{cases} \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 1+6\lambda \\ z = -2-\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}). \\ x + 2y + z - 15 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (1+3\lambda) + 2(1+6\lambda) + (-2-\lambda) - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 14\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{14}{14} = 1$

on remplace la valeur trouvé dans l'éq de (Δ) : $\begin{cases} x = 1 + 3\times 1 \\ y = 1 + 6 \times 1 \\ z = -2-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \\ z = -3 \end{cases}$ donc :

$(\Delta) \cap (\mathcal{P}) = \{ A(4; 7; -3) \}$

Ex. 8 : On considère un plan $(\mathcal{P})$ défini par son équation cartésienne :

$(\mathcal{P}) : x - y + 3z - 4 = 0$

Trouver une représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$

▸ **Solution :** on a : $(\mathcal{P}) : x - y + 3z - 4 = 0$ $(*)$

on pose : $y = t$ et $z = t'$; $(t, t') \in \mathbb{R}^2$

donc $(*) \Leftrightarrow x - t + 3t' + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4 + t - 3t'$

on obtient le système : $(\mathcal{P})\begin{cases} x = -4+t-3t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases} (t; t') \in \mathbb{R}^2$

Rq : De cette représentation on déduit que $(\mathcal{P})$ passe par le point $A(4; 0; 0)$ et dirigés par les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

Ex. 9 : Soit $(\mathcal{P})$ un plan déterminé par sa représentation paramétrique :

$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = 1 + t - t' \\ y = 2 - t + 2t' \\ z = -1 + 2t \end{cases} (t, t') \in \mathbb{R}^2$

Donner une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.

▸ Solution : on a : $(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = 1 + t - t' \\ y = 2 - t + 2t' \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$

donc $A(1 ; 2 ; -1) \in (\mathcal{P})$

et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$.

en utilisant le dessin suivant on remarque que :

$\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$

où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

on doit déterminer les coordonnées de $\vec{n}$, car l'éq cartésienne de $(\mathcal{P})$ s'écrit : $ax + by + cz + d = 0$ (*)

on a donc :

$$\vec{n} \perp (\mathcal{P}) \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ \vec{n} \perp \vec{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \times \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \times \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ -a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b - 2c \\ a = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = b - 2c \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a = 2b = 2 \times (-2c) = -4c \end{cases}$$

donc : $\vec{n}\begin{pmatrix} -4c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$; $c \in \mathbb{R}$

$\vec{n} \neq \vec{0}$ donc : $c \neq 0$. on prend par exemple $c = -1$, donc : $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

on remplace dans l'éq : (*)

$(\mathcal{P}) : 4x + 2y - z + d = 0$

Pour déterminer d on écrit :

$A(1 ; 2 ; -1) \in (\mathcal{P}) \Rightarrow 4x_A + 2y_A - z_A + d = 0$

$\Rightarrow 4(1) + 2(2) - (-1) + d = 0$

$\Rightarrow 4 + 4 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -9$

donc : $\boxed{(\mathcal{P}) : 4x + 2y - z - 9 = 0}$

Ex. 10 : $(\mathcal{P})$ est un plan passant par $A(3 ; 1 ; -2)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1°/ Donner une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.

2°/ Vérifier que : $B(1 ; -1 ; -1) \in (\mathcal{P})$
$C(1 ; -1 ; 0) \notin (\mathcal{P})$

3°/ Donner une représentation paramétrique de la droite (D) : telle que : $\begin{cases} C \in (D) \\ (D) \perp (\mathcal{P}) \end{cases}$

▸ Solution : Soit $M(x ; y ; z)$ un point de l'espace. on a :

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{n}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

avec : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix}$

donc :

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 1(x-3) + 1(y-1) + 4(z+2) = 0$

$\Leftrightarrow x + y + 4z - 3 - 1 + 8 = 0$

on trouve : $\boxed{(\mathcal{P}) : x + y + 4z + 4 = 0}$

2°/ $B(1 ; -1 ; -1) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow x_B + y_B + 4z_B + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + (-1) + 4(-1) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$. cette égalité est vraie

donc on a bien : $\boxed{B \in (\mathcal{P})}$

on a : $x_C + y_C + 4z_C + 4 = 1 - 1 + 0 + 4 = 4 \neq 0$

donc : $C(1;-1;0) \notin (P)$.

3°/ on a : $(D) \perp (P)$
et $\vec{n} \perp (P)$

donc (D) est dirigé par $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

(D) $\vec{n}$

c.à.d :

$(D) = D(C; \vec{n})$

donc : $(D) : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

E.X. 11 : $A(0;0;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;1)$

1°/ Montrer que A; B et C ne sont pas alignés.

2°/ Donner ~~une~~ équation cartésienne du plan : (ABC).

▸ Solution : $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1-0\\2-0\\0-1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

et comme : $\begin{vmatrix}-1 & 1\\2 & 1\end{vmatrix} = (-1)(1) - (2)(1)$
$= -1 - 2 = -3 \neq 0$

donc A ; B et C ne sont pas alignés
(A , B , C غير مستقيمية)

Rq : trois points qui ne sont pas alignés forment toujours un plan, donc : (ABC) est un plan passant par le point A et dirigés par les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

2°/ A ; B ; C non alignés $\Rightarrow$ A ; B et C forment un plan (A BC)

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

(ABC) A B C

$M \in (ABC) \Leftrightarrow$ (A ; B ; C et M sont coplanaires)

$\Leftrightarrow \det(\vec{AM}; \vec{AB}; \vec{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & -1 & 1 \\ y-0 & 2 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix}y & 1\\z-1 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}y & 2\\z-1 & -1\end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x(0+1) + (0-(z-1)) + (-y - 2(z-1)) = 0$

$\Leftrightarrow x - z + 1 - y - 2z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 3z + 3 = 0$

donc : $(ABC) \quad x - y - 3z + 3 = 0$

* * * *